



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

084

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۴/۴

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	سید جواد نظری
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنون

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

۱- هرگاه A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم باشند، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $A - B' = \emptyset$ (۲) $A - B = B'$ (۳) $A' \cup B = A'$ (۴) $A \cap B' = A$

پاسخ: گزینه ۲



نکته: وقتی دو مجموعه غیر تهی، جدا از هم باشند $A \cap B = \emptyset$

نکته: $A - B = A \cap B'$

گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱:

$$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = \emptyset$$

گزینه ۲:

$$A - B = A \cap B' = A$$

با توجه به نمودار $A \subset B'$

می‌دانیم:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

پس گزینه ۲ نادرست است.

اما گزینه ۳:

$$A - B = A \cap B' = A \Rightarrow (A \cap B')' = A'$$

$$A' \cup B = A'$$

یعنی:

$$A - B = A \cap B' = A$$

گزینه ۴:

۲- هرگاه a و a-۴ به ترتیب واسطه حسابی و واسطه هندسی دو عدد متمایز b و ۲ باشند. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

نکته: واسطه حسابی α و β برابر $\frac{\alpha + \beta}{2}$ و واسطه هندسی آنها $\sqrt{\alpha\beta}$ است.

چون a واسطه حسابی است، پس: $\frac{b+2}{2} = a$

از طرفی $a-4$ واسطه هندسی است، پس: $\sqrt{2b} = a-4$

با حل دستگاه داریم:

$$b = 2a - 2$$

$$\sqrt{2a-4} = a-4 \quad a \geq 4, a \geq 1 \Rightarrow a \geq 4$$

$$2a-4 = (a-4)^2 \Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0$$

$$(a-10)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \Rightarrow b=18 \\ \text{غیق } a=2 \end{cases}$$

۳- اگر $A = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$ مقدار $(A - \sqrt[3]{9})^3$ چه عددی است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



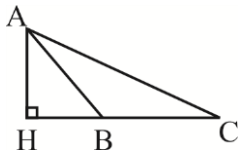
در ابتدا مخرج کسر را گویا می کنیم:

$$(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) \times (\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}) = \alpha - \beta$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{3 - 2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} \Rightarrow A - \sqrt[3]{9} = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow (A - \sqrt[3]{9})^3 = (-\sqrt[3]{4})^3 = -4$$

۴- در شکل روبه‌رو $\tan \hat{B} = \frac{3}{4}$ و $\tan \hat{C} = \frac{3}{8}$ ، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AHB است؟



$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

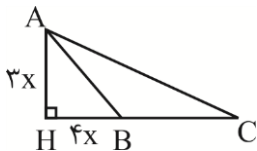
$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آن که $\tan \hat{B} = \frac{3}{4}$ پس $AH = 3x$ و $HB = 4x$.



از طرفی $\tan \hat{C} = \frac{3}{8}$ پس $BC = 4x$ ؛ حال مساحت‌ها را به دست می آوریم:

$$S_{AHB} = \frac{1}{2} \times 3x \times 4x = 6x^2 \Rightarrow S_{ABC} = 6x^2$$

$$S_{AHC} = \frac{1}{2} \times 3x \times 8x = 12x^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AHB}} = \frac{6x^2}{6x^2} = 1$$

۵- نمودار سهمی $f(x) = x(mx + 2x + 4)$ ، همواره زیر خط $y = 1$ قرار گرفته است. حدود m کدام است؟

$$m < -6 \quad (4) \quad -6 < m < -2 \quad (3) \quad -2 < m < 6 \quad (2) \quad 2 < m < 6 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

برای آن که نمودار $y = f(x)$ زیر خط $y = 1$ قرار بگیرد، باید برای هر عدد حقیقی x شرط $f(x) < 1$ برقرار باشد، یعنی:

$$mx^2 + 2x^2 + 4x < 1 \Rightarrow (m+2)x^2 + 4x - 1 < 0$$

حال برای آن که شرط فوق برقرار باشد باید:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow m+2 < 0 \Rightarrow m < -2 \\ \Delta = 16 + 4(m+2) < 0 \Rightarrow m+2 < -4 \Rightarrow m < -6 \end{cases} \Rightarrow m < -6$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۶- هرگاه $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 5x + 3$ باشند، مقدار $f(\alpha + \beta)$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) $-\frac{25}{9}$

(۲) $-\frac{23}{9}$

(۱) $-\frac{21}{9}$

پاسخ: گزینه ۲

چون $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ صفرهای چند جمله‌ای درجه دوم $x^2 - 5x + 3 = 0$ هستند، پس:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 5 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 5 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = 3 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5}{3}$$

$$f(\alpha + \beta) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{5 \times 5}{3} + 3 = \frac{25 - 75 + 27}{9} = -\frac{23}{9}$$

پس می‌توانیم $f(\alpha + \beta)$ را به‌دست آوریم:

۷- مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ و خط $2y + x = 2$ چه عددی است؟

(۴) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{25}{9}$

(۲) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

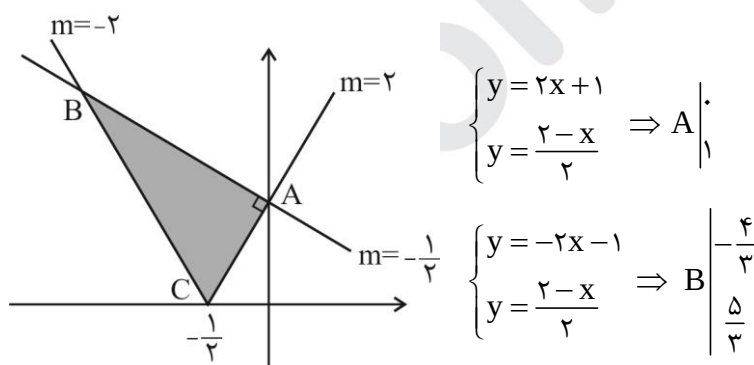
(۱) $\frac{25}{18}$

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا می‌دانیم $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ پس $f(x) = |2x+1|$ ، حال، به کمک رسم می‌توانیم ناحیه مورد نظر را مشخص کنیم.

نقاط تلاقی خط با نمودار $y = |2x+1|$ را معلوم می‌کنیم:

چون شیب پاره‌خط AB، عکس و قرینه شیب پاره‌خط AC است، بنابراین برهم عمودند، پس مطابق شکل، مثلث ABC در رأس A قائمه است.



حال، مساحت مثلث با سه رأس $A \left(0, 1\right)$ و $B \left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ و $C \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ را به‌دست می‌آوریم و می‌دانیم مثلث در رأس A قائمه است.

$$AB = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{6}$$

$$AC = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۸- با فرض آن که α ریشه معادله $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = 4$ باشد، مقدار $\alpha^2 - 6\alpha$ کدام است؟

۵ (۴)

۷ (۳)

۹ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+2} = 4 - \sqrt{8-x} \Rightarrow x+2 = 16 + 8 - x - 8\sqrt{8-x}$$

$$2x - 22 = -8\sqrt{8-x} \Rightarrow x - 11 = -4\sqrt{8-x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 16(8-x) \Rightarrow$$

$$x^2 - 22x + 121 = 128 - 16x \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

البته باید دقت کنیم که آیا جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول است یا نه!

هم می‌توانیم در معادله اولیه صدق دهیم و هم می‌توانیم شرایط معادله در تعیین علامت عبارت‌ها، قبل از به توان ۲ رساندن را چک کنیم که حالت اول راحت‌تر است و هر دو جواب قابل قبول است.

$$\Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha = 7$$

۹- ۴ دانش‌آموز ریاضی و ۳ دانش‌آموز تجربی در یک ردیف کنار هم قرار گرفته‌اند. در چند حالت هیچ دو دانش‌آموز تجربی کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۵! × ۴! (۴)

 $\frac{5! \times 4!}{2!}$ (۳)

۲ × ۴! × ۴! (۲)

۲ × ۴! × ۳! (۱)

پاسخ: گزینه ۳

قرار است، دانش‌آموزان تجربی کنار هم نباشند، در واقع از دانش‌آموزان ریاضی به عنوان مانع استفاده می‌کنیم. ابتدا موانع را جایگزین می‌کنیم.

○ R ○ R ○ R ○ R ○

از بین ۵ جایگاه موجود، ۳ جایگاه را انتخاب کرده و به دانش‌آموزان تجربی اختصاص می‌دهیم و سپس آنها را با هم جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{5}{3} \times 3! \times 4! = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 3! \times 4! = \frac{5! \times 4!}{2!}$$

جایگشت ریاضی‌ها
جایگشت تجربی‌ها

۱۰- در کیسه A، ۴ مهره قرمز و ۶ مهره سفید، در کیسه B، ۴ مهره سفید و تعدادی مهره قرمز است. اگر به تصادف دو مهره از A و دو مهره از B خارج کنیم، احتمال آن که هر ۴ مهره قرمز باشد $\frac{1}{27}$ است. تعداد مهره‌های کیسه B چه عددی است؟

۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

۹ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



فرض کنیم تعداد مهره قرمز در ظرف B برابر n باشد، در این صورت احتمال آن که هر ۴ مهره قرمز باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+4}{2}} = \frac{1}{27}$$

مهره کیسه B قرمز باشد مهره کیسه A قرمز باشد

$$\Rightarrow \frac{4 \times 3}{10 \times 9} \times \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+3)} = \frac{12n(n-1)}{90(n+3)(n+4)} = \frac{1}{27}$$

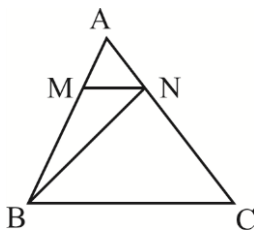
$$\Rightarrow \frac{2n(n-1)}{5(n+3)(n+4)} = \frac{1}{9} \Rightarrow 18n(n-1) = 5(n^2 + 7n + 12)$$

$$\Rightarrow 13n^2 - 53n - 60 = 0 \Rightarrow (n-5)(13n+12) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{n=5} \Rightarrow \text{تعداد مهره B} = 9$$

۱۱- در شکل روبه‌رو، MN موازی BC است، به‌طوری‌که BN نیمساز زاویه N است. هرگاه AN=۹ و MN=۶ باشد،

طول BC کدام است؟



۱۲ (۲)

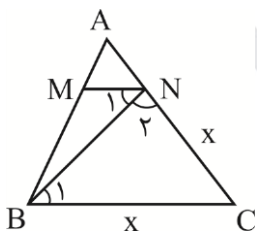
۱۸ (۱)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آن که MN با BC موازی است و BN مورب است، پس $\hat{B}_1 = \hat{N}_1$ ، از طرفی BN نیمساز زاویه N است، پس: $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$



به این ترتیب $\hat{B}_1 = \hat{N}_2$ یعنی مثلث BNC متساوی‌الساقین است، یعنی $BC = NC$.

اگر فرض کنیم $BC = x$ ، مطابق تالس داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{9+x} = \frac{6}{x} \Rightarrow$$

$$9x = 54 + 6x \Rightarrow 3x = 54 \Rightarrow BC = 18$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۲- در یک دوزنقه پاره‌خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند، مساحت آن را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم می‌کند، قاعده بزرگ دوزنقه چند برابر قاعده کوچک آن است؟

$\frac{9}{4}$ (۴)

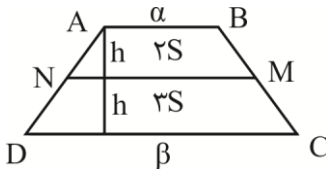
$\frac{6}{5}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

آنچه بدیهی است $MN = \frac{\alpha + \beta}{2}$



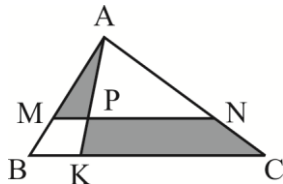
با توجه به آن که مساحت‌ها به نسبت ۲ به ۳ است، پس:

$$\begin{cases} S_{ABNM} = 2S \\ S_{NMCD} = 3S \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2S &= \frac{\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot h \\ 3S &= \frac{\beta + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot h \end{aligned}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\alpha + \beta}{3\beta + \alpha} \Rightarrow 6\beta + 2\alpha = 9\alpha + 3\beta \Rightarrow 3\beta = 7\alpha \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{3}$$

۱۳- در شکل روبه‌رو، اگر $AK = 4PK$ و $BK = 3$ و $KC = 8$ باشد، نسبت مساحت مثلث AMP به مساحت دوزنقه $PNCK$ چه عددی است؟



$\frac{9}{14}$ (۲)

$\frac{9}{56}$ (۱)

$\frac{27}{56}$ (۴)

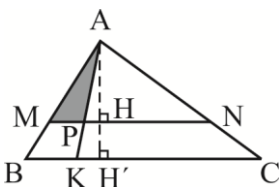
$\frac{5}{14}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

برای حل در ابتدا فرض می‌کنیم $PK = x$ ، پس $AP = 3x$.
در مثلث ABK داریم:

$$\frac{MP}{BK} = \frac{AP}{AK} \Rightarrow \frac{MP}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow MP = \frac{9}{4}$$

از طرفی در مثلث AKC داریم:



$$\frac{AP}{AK} = \frac{PN}{KC} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{PN}{8} \Rightarrow PN = 6$$



از طرفی $AH = 3HH'$ با این مقدمات داریم:

$$S_1 = S_{AMP} = \frac{1}{2} MP \cdot AH$$

$$S_2 = S_{PNCK} = \frac{PN + KC}{2} \cdot HH'$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times AH}{\frac{6+8}{2} \cdot HH'} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{56}$$

۱۴- اگر دو سری داده $A: 2, 2, 3, 3, 3, 3$ و $B: 3, 3, 2, 2, 2, 2$ را در نظر بگیریم، واریانس داده‌های سری A چند برابر واریانس داده‌های سری B است؟

$$\frac{9}{4} (۴)$$

$$\frac{3}{2} (۳)$$

$$\frac{2}{3} (۲)$$

$$۱ (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ داده‌ها و $\bar{x}$ میانگین باشد:

$$\text{واریانس} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

واریانس داده‌های سری A را می‌یابیم:

$$\text{سری } A: \bar{x} = \frac{2+2+3+3+3+3}{6} = \frac{13}{3}$$

در حالتی که داده‌ها صحیح و میانگین کسری باشد $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ ، فرمول مناسبی است.

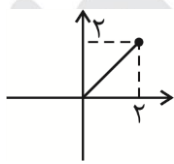
$$\text{واریانس } A = \frac{2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2}{6} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{35}{3} - \frac{169}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

به طریق مشابه برای داده‌های سری B داریم:

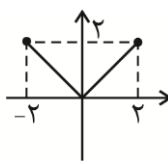
$$\bar{y} = \frac{3+3+2+2+2+2}{6} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \text{واریانس } B = \frac{9+9+4+4+4+4}{6} - \frac{144}{36} = \frac{30}{6} - \frac{144}{36} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{نسبت واریانس‌ها} = \frac{2}{3} \Rightarrow B = \frac{30}{6} - \frac{144}{36} = \frac{6}{6} = 1$$

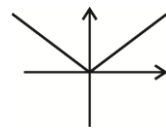
۱۵- با فرض $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، نمودار $y = f \circ f(x)$ کدام است؟



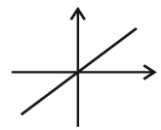
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ضابطه و دامنه $y = f \circ f$ را به دست می‌آوریم.

$$f \circ f(x) = \sqrt{4 - f^2} = \sqrt{4 - (4 - x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\}$$

اما

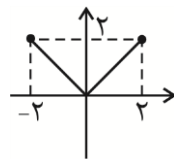
$$D_f = [-2, 2], \quad -2 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$$

بدیهی

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$4 - x^2 \leq 4 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow D_{f \circ f} = D_f = [-2, 2]$$



یعنی نمودار به صورت مقابل است:

۱۶- هرگاه $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g = \{(-2, 0), (-4, -2), (0, -4)\}$, مجموع اعضای برد تابع $\frac{f}{f \circ g^{-1}}$ چه عددی است؟

$$-\frac{3}{2} (4)$$

$$\frac{7}{2} (3)$$

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$-\frac{9}{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا g^{-1} را معلوم می‌کنیم:

$$g^{-1} = \{(0, -2), (-2, -4), (-4, 0)\}$$

حاصل $f \circ g^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$f \circ g^{-1} = \{(0, -2), (-2, 4), (-4, 0)\}$$

اینک $\frac{f}{f \circ g^{-1}}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{f}{f \circ g^{-1}} = \left\{ (0, 0), (-2, -\frac{1}{2}) \right\}$$

برد آن $\{0, -\frac{1}{2}\}$ است، پس مجموع اعضای برد $-\frac{1}{2}$ است.

۱۷- نمودار دو تابع $y = 9^x - 1$ و $y = 4 \times 3^x - 4$ در نقاط A و B متقاطع هستند. طول پاره خط AB کدام است؟

$$\sqrt{63} (4)$$

$$\sqrt{65} (3)$$

$$\sqrt{53} (2)$$

$$\sqrt{59} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم $k = 3^x$ حل معادله راحت تر خواهد شد.

$$4 \times 3^x - 4 = 9^x - 1 \Rightarrow 4k - 4 = k^2 - 1$$

$$4(k-1) = (k-1)(k+1) \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k+1=4 \Rightarrow k=3 \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$k=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow B \left| \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} \right.$$

حال طول پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۸- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{b}{x+1} + \frac{a}{x^2-1} & x > -1 \\ ax+2 & x \leq -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته باشد، مقدار b چه عددی است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

باید حدود چپ و راست تابع در $x = -1$ و $f(-1)$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a + 2 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{b}{x+1} + \frac{a}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{b(x-1)+a}{x^2-1}$$

اولاً باید $-2b + a = 0$ یعنی $a = 2b$ ثانیاً باید رفع ابهام شود:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{b(x-1)+2b}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{b(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-b}{2}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2} = 2 - a \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow -\frac{b}{2} = 2 - 2b \Rightarrow 2b - 2 = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}b = 2 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

۱۹- ساده شده $P = \frac{6}{6 + \log_2^3} + \frac{1}{1 + 6 \log_2^3}$ کدام است؟

$\log_3^6$ (۴)

$\log_6^9$ (۳)

$\log_9^4$ (۲)

۱ (۱)

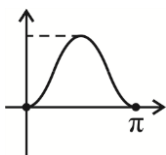
پاسخ: گزینه ۱

نکته: $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

برای ساده شدن روند حل، در ابتدا فرض می‌کنیم $\log_2^3 = A$ ، پس $\log_2^3 = \frac{1}{A}$ در این صورت داریم:

$$P = \frac{6}{6+A} + \frac{1}{1+\frac{6}{A}} = \frac{6}{6+A} + \frac{A}{6+A} = 1$$

۲۰- نمودار تابع $f(x) = 2 + a \cos bx$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{\pi}{ab})$ چه عددی است؟



$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۱ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با توجه به دو شرط زیر داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

دقت کنید چون $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ ، پس علامت b دقیقاً معلوم نمی‌شود، البته مهم نیست.

$$f\left(\frac{\pi}{ab}\right) = f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

۲۱- نمودار $y = \sqrt{2x-1}$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده‌ایم، سپس نمودار حاصل را k واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم.شکل به دست آمده شکل اصلی (اولیه) را در نقطه‌ای به طول $x=2$ قطع کرده است. k چه عددی است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مرحله به مرحله جلو می‌رویم:

$$y = \sqrt{2x-1} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{\substack{\text{نسبت به محور عرض‌ها} \\ \text{قرینه می‌کنیم}}} y = \sqrt{-2x-1} \xrightarrow[k \text{ واحد به چپ}]{\text{انتقال می‌دهیم}}$$

$$y = \sqrt{-2(x+k)-1} = \sqrt{-2x-1-2k}$$

حال باید نمودار به دست آمده را با $y = \sqrt{2x-1}$ قطع دهیم و $x=2$ ریشه آن باشد.

$$\sqrt{-2x-1-2k} = \sqrt{2x-1} \Rightarrow \sqrt{-4-1-2k} = \sqrt{3} \Rightarrow -2k-5=3 \Rightarrow k=-4$$

۲۲- هرگاه $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2+3}}{b(x-1)}$ به طوریکه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ را بررسی می‌کنیم. مخرج صفر شده پس صورت هم صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - \sqrt{x^2+3}}{b(x-1)} = 3 \Rightarrow a=2 \text{ لازم است}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^2 x^2 - x^2 - 3}{b(x-1)(ax + \sqrt{x^2+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{b(x-1) \times 4} = \frac{6}{4b} = \frac{3}{2b} = 3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

حال $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+3}}{\frac{1}{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\frac{1}{2}x} = 6$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos x \cos(\frac{\pi}{4} + x) = 1$ کدام است؟

$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴)

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳)

$x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲)

$x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = -\sin x$

$\Rightarrow -2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow -\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2})$

می‌دانیم $\sin 2x = -1$ آنگاه $2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ پس $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ جواب کلی معادله است.

۲۴- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} - 2[x] & x \geq 1 \\ x^2 + b|x| & x < 1 \end{cases}$ به‌طوری‌که $f'_+(1) - f'_-(1) = 2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۷ (۴)

-۷ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه آن را ساده می‌کنیم $[x] = 1 \Rightarrow x \geq 1$ (دقت کنید $x \geq 1$ به معنای آن است که x در همسایگی راست $x=1$ باشد).

$x < 1 : |x| = x$

پس: $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} - 2 & x \geq 1 \\ x^2 + bx & x < 1 \end{cases}$

شرط پیوستگی در $x=1$:

$\frac{a}{1} - 2 = 1 + b \Rightarrow a - b = 3$

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x^2} & x > 1 \Rightarrow f'_+(1) = -a \\ 2x + b & x < 1 \Rightarrow f'_-(1) = 2 + b \end{cases}$

$f'_+(1) - f'_-(1) = -a - b - 2 = 2 \Rightarrow a + b = -4$

$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{7}{2} \Rightarrow ab = 7$

۲۵- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، کدام است؟

$\frac{15}{2}$ (۴)

$\frac{13}{2}$ (۳)

$\frac{11}{2}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای یافتن خط مماس ابتدا نقطه تماس و شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم:

نقطه تماس $A \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+3)}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{2-5}{1}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ} = \frac{11}{2}$$

عرض از مبدأ یک خط، نقطه تلاقی خط با محور عرض‌هاست.

۲۶- اگر طول اکستریم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 4x + a$ برابر ۲ باشد، مقدار تابع به‌ازای طول اکستریم دیگر آن، کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{8}{27} \quad (2)$$

$$-\frac{14}{27} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

f تابعی مشتق‌پذیر است و $x = 2$ طول اکستریم آن است، پس $f'(2) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 4 \Rightarrow f'(2) = 12 + 4a = 0 \Rightarrow a = -3$$

برای یافتن طول اکستریم دیگر داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow f(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27} - 2 \times \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 2 \Rightarrow f(-\frac{2}{3}) = \frac{-8 - 24 + 72 - 54}{27} = -\frac{14}{27}$$

۲۷- تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$ بر بازه $[-2, 1]$ تعریف شده است. اگر مقدار $\max$ مطلق تابع از دو برابر $\min$ مطلق تابع یک واحد بیشتر باشد، k کدام است؟

$$25 \quad (4)$$

$$21 \quad (3)$$

$$32 \quad (2)$$

$$46 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مقدار تابع در نقاط بحرانی را یافته و آنها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-2) = 2 \times (-8) - 3 \times 4 - 12 \times (-2) + k = k - 4$$

$$f(1) = 2 - 3 - 12 + k = k - 13$$

ریشه‌های تابع مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غقی}$$

$x = 2$ در بازه داده شده نمی‌باشد.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + k = k + 7$$

$$\max = k + 7 \text{ مطلق و } \min = k - 13 \text{ مطلق}$$

$$k + 7 = 2(k - 13) + 1 \Rightarrow k + 7 = 2k - 26 + 1 \Rightarrow \underline{k = 32}$$

۲۸- قطرهای یک بیضی برابر ۶ و ۱۰ است. دایره‌ای که FF' قطری از آن باشد، بیضی را در M قطع کرده است. فاصله M تا نزدیک‌ترین کانون چقدر است؟

$$7 - \sqrt{5} \quad (4)$$

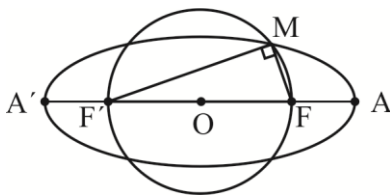
$$7 + \sqrt{5} \quad (3)$$

$$5 - \sqrt{7} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} + 7 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \text{ وقتی قطرهای بیضی ۶ و ۱۰ باشد، یعنی:}$$



به این ترتیب با توجه به $a^2 = b^2 + c^2$ ، آنگاه $c = 4$ ، از طرفی چون FF' قطری از دایره است پس مرکز دایره همان مرکز بیضی است و شعاع دایره ۴ است.

از طرفی $MF + MF' = 2a$ و M روی دایره است، لذا زاویه $M = 90^\circ$ ، یعنی مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

$$MF = x \Rightarrow MF' = 2a - x, FF' = 2c$$

پس مطابق فیثاغورس داریم:

$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2$$

$$8^2 = x^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow 64 = x^2 + x^2 + 100 - 20x$$

$$x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} + 5 \\ x = 5 - \sqrt{7} \end{cases}$$

فاصله تا نزدیک‌ترین کانون $5 - \sqrt{7}$ است.

۲۹- دایره‌ای که با کم‌ترین مساحت، از دو نقطه $A(-4, 5)$ و $B(2, 1)$ می‌گذرد، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$1, -3 \quad (4)$$

$$-1, 3 \quad (3)$$

$$-1, -3 \quad (2)$$

$$1, 3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

از دو نقطه بی‌شمار دایره عبور می‌کند و تنها در حالتی دایره با کم‌ترین مساحت خواهد شد که دو نقطه دو سر قطر دایره شوند، پس AB قطری از دایره است و به همین جهت مرکز دایره وسط A و B است.

$$O \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \Rightarrow O \left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right) = (-1, 3)$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



از طرفی:

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13} \Rightarrow R = \sqrt{13}$$

یعنی معادله دایره $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$ است.برای آن که دایره محور طول‌ها را قطع کند، باید $y=0$ قرار دهیم.

$$y=0 \Rightarrow (x+1)^2 + 9 = 13 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

طول نقاط تلاقی، $x=1$ و $x=-3$ است.۳۰- احتمال موفقیت رضا در آزمون فیزیک سه برابر احتمال موفقیت او در آزمون شیمی است. او به احتمال $\frac{13}{16}$ حداقل در یکی

از دو آزمون موفقیت داشته است. با کدام احتمال، او فقط در آزمون شیمی موفقیت داشته است؟

$$\frac{3}{32} (4)$$

$$\frac{1}{16} (3)$$

$$\frac{1}{8} (2)$$

$$\frac{3}{16} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم احتمال موفقیت در آزمون شیمی x باشد، آنگاه احتمال موفقیت در آزمون فیزیک $3x$ است.

$$P(p) = 3x, \quad P(c) = x$$

$$P(p \cup c) = P(p) + P(c) - \frac{P(p \cap c)}{P(p) \cdot P(c)} \Rightarrow \frac{13}{16} = 3x + x - 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{13}{16} = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{4})(3x - \frac{13}{4}) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{13}{12} \text{ غق} \end{cases} \Rightarrow P(c-p) = P(c) \cdot P(p') \xrightarrow{P(c)=\frac{1}{4}, P(p)=\frac{3}{4}} P(c-p) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

